

## **SIMULACIÓN NUMÉRICA DE FLUJO MAGNETOGASDINÁMICO IDEAL 3D NO ESTACIONARIO**

**Mariano Martínez<sup>a</sup>, Ana Scarabino<sup>a</sup> y Sergio Elaskar<sup>b</sup>**

<sup>a</sup> *Departamento de Aeronáutica, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata.  
(1900) Calle 116 e/ 47 y 48, La Plata, Argentina. e-mail: [mmartinezk@ing.unlp.edu.ar](mailto:mmartinezk@ing.unlp.edu.ar)*

<sup>b</sup> *Departamento de Aeronáutica, Universidad Nacional de Córdoba y CONICET  
(5000) Av. Velez Sarsfield 1611, Córdoba, Argentina*

**Palabras claves:** Magnetogasdínámica, problema de Riemann, esquema TVD

**Resumen.** En este trabajo se presentan los resultados obtenidos mediante el uso de una metodología implementada para resolver numéricamente las ecuaciones de la magnetogasdínámica ideal tridimensional no estacionaria. Dicha metodología está basada en un método de alta resolución junto con un esquema “Total Variation Diminishing” (TVD) en un seguidor de Riemann aproximado. Se resuelve el problema del “tubo de choque” para un fluido conductor inmerso en un campo magnético. Los resultados obtenidos con un mallado de 200x70x70 se han comparado con aquellos realizados y validados en 2D para un mallado de 1000x350. Ambos resultados presentan grandes similitudes. Las pequeñas diferencias observadas se atribuyen a la diferencia de densidad de los mallados. Por esta razón se realiza posteriormente una comparación entre resultados 3D con cuatro densidades de mallado diferentes, observándose que las diferencias entre estos resultados concuerdan con las observadas entre los resultados anteriores.

## 1 INTRODUCCION

La magnetogasdínámica estudia el movimiento de fluidos compresibles ionizados, es decir conductores de carga eléctrica. Las ecuaciones que gobiernan dichos flujos son la conservación de la masa (continuidad), de la cantidad de movimiento (Segunda Ley de Newton), de la energía (Primera Ley de la Termodinámica), ecuación de estado junto con las ecuaciones de Maxwell. Este grupo de ecuaciones debe ser complementado con modelos termoquímicos sin equilibrio en el caso de tener que considerar flujos a elevadas temperaturas (D'Ambrosio y Giordano 2004). Las ecuaciones de la magnetogasdínámica pueden dividirse en tres categorías en función de las simplificaciones introducidas y de la forma que adquieren las ecuaciones de balance mencionadas:

- 1- Magnetogasdínámica ideal (MGDI): el sistema es definido por las ecuaciones de Euler junto con la ecuación de inducción magnética.
- 2- Magnetogasdínámica real (MGDR): el sistema queda descrito por las ecuaciones de Navier-Stokes junto con la ecuación de inducción magnética.
- 3- Magnetogasdínámica completa (MGDC): se presentan acopladas las ecuaciones de Navier-Stokes y las de Maxwell.

En los tres casos es posible tener más de una especie y reacciones químicas entre dichas especies que generan términos fuentes. Además es necesario especificar la ecuación de estado.

Una aplicación de particular interés de la MGDI es la propagación de ondas en arcos magnéticos solares (Borgazzi, A. y Costa, 2005; Costa, 2008).

En el presente artículo se utilizarán las ecuaciones de la magnetogasdínámica ideal. Se destaca que gran parte de este trabajo está basado y es una extensión de los desarrollos realizados por Maglione (2004) para la simulación bidimensional de flujos magnetogasdínámicos ideales.

El objetivo de este trabajo es presentar los resultados logrados con un código numérico desarrollado para resolver las ecuaciones adimensionales de la magnetogasdínámica ideal (MGDI) tridimensional no estacionaria utilizando un solver de Riemann aproximado junto con un esquema TVD.

Se destaca que otros investigadores están trabajando en líneas de desarrollo similar a la presentada en este trabajo. Por ejemplo: Keppens (2001) ha utilizado para las ecuaciones de la magnetogasdínámica el "solver" de Riemann aproximado de Roe; Sankaran (2004) desarrolla un esquema "local extremum diminishing - LED"; D'Ambrosio et al. (2004) solucionan las ecuaciones de la magnetogasdínámica completa (MGDC) en una dimensión espacial y dependientes del tiempo; Loverich (2004) simula las ecuaciones de la magnetohidrodinámica considerando dos especies por medio de una aproximación de Roe al "solver" de Riemann; Udrea (1999) utiliza un esquema TVD similar al empleado en este trabajo.

## 2. ECUACIONES DE LA MAGNETOGASDINAMICA IDEAL

Las ecuaciones de la magnetogasdínámica ideal (MGDI) caracterizan el flujo de un fluido conductor ionizado en presencia de campos magnéticos sin consideración de efectos difusivos. Representan el acoplamiento de las ecuaciones de la dinámica de fluidos compresibles (ecuaciones de Euler) con las ecuaciones de Maxwell de la electrodinámica. Si sólo se consideran campos magnéticos y se desprecian corrientes de desplazamiento, fuerzas electrostáticas, efectos de viscosidad, resistividad y conducción de calor, se obtienen las ecuaciones de la MGDI (Dendy, 1999):

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ \mathbf{B} \\ e \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} \mathbf{u} - \mathbf{B} \mathbf{B} + I \left( P + \frac{1}{2} B^2 \right) \\ \mathbf{u} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \left( e + P + \frac{1}{2} B^2 \right) \mathbf{u} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{B} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad \text{que escribiremos} \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{U}) = \mathbf{0} \quad (1)$$

con el requisito adicional de que  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . Las variables son la densidad del fluido  $\rho$ , la velocidad  $\mathbf{u}$ , el campo magnético  $\mathbf{B}$ , la presión estática  $P$ , la energía total  $e$ , definida  $e = \epsilon + \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{1}{2} B^2$  y la energía interna  $\epsilon$ .

Una aplicación en la cual la magnetogasdínámica ideal trabaja razonablemente bien corresponde a la simulación del comportamiento de los arcos magnéticos que se producen en la corona solar (Costa, 2008; Fernández et al., 2008).

El sistema (1) es un sistema de ecuaciones diferenciales a derivadas parciales de conservación donde  $\mathbf{U}$  es el vector de variables conservadas cuyas componentes son:

$$\mathbf{U} = (\rho, \rho u_x, \rho u_y, \rho u_z, B_x, B_y, B_z, e)^T$$

Dicho sistema es hiperbólico, ya que su matriz jacobiana tiene autovalores reales, y es no lineal. Como el método de resolución utilizado, que será explicado en la siguiente sección, exige que el sistema sea estrictamente hiperbólico, deben introducirse modificaciones a la matriz jacobiana para que los ocho autovalores sean también distintos entre sí (Powell, 1995).

A diferencia de la mecánica de fluidos de medios no conductores, que sólo poseen cinco ondas en una formulación 3D, la MGD permite la existencia de ocho ondas. Las velocidades de desplazamiento de estas ondas están dadas por sus respectivos autovalores de la matriz jacobiana. La onda de mayor velocidad, que es la magnetosónica rápida, es la que limita el paso de tiempo en la discretización temporal.

Introduciendo un sistema de coordenadas cartesianas ortonormales la Ec. (1) puede ser escrita en términos de flujos para el caso tridimensional como:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = \mathbf{0} \quad (2)$$

donde  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{H}$  son “vectores de flujos hiperbólicos” o “flujos de Godunov” quien los definió en la segunda versión del método que lleva su nombre presentada en 1976 (Godunov, 1976). Estos flujos se calcularán en forma análoga a la formulación 1D (Elaskar et al., 2000) y 2D (Maglione, 2004).

### 3 APROXIMACIÓN NUMÉRICA

Se utiliza el método de volúmenes finitos, discretizando el dominio espacial en celdas e introduciendo una formulación integral, en una malla estructurada. Para la derivada temporal se utilizan diferencias finitas de primer orden upwind en un esquema explícito.

Los flujos numéricos hiperbólicos son evaluados por medio del Método de Roe (1981) con las modificaciones introducidas por Harten y Yee (1985) y Yee (1989) y empleando la técnica

“Total Variation Diminishing - TVD” (Le Veque 1992 y 2005). Este método permite alcanzar resultados con precisión de segundo orden en las regiones donde la solución es suave, así como capturar discontinuidades sin introducir oscilaciones espurias.

El problema en estudio consiste en el flujo en un tubo de choque magnetogasdinámico de sección rectangular de longitud  $L$ , que se halla lleno con un gas ionizado del tipo que representan las ecuaciones de la MGDI descriptas en el sistema (1). En alguna parte de la longitud del tubo se encuentra ubicada una membrana que separa dos estados diferentes del gas mencionado. Si en un momento determinado esta membrana es súbitamente retirada se producirá una interacción entre los dos estados iniciales. Este proceso es el que modelaremos utilizando un problema de Riemann de la MGDI, formalizado de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = \mathbf{0}$$

con condiciones iniciales de la forma

$$\mathbf{U}(x, y, z, 0) = \mathbf{U}^0(x, y, z)$$

y de contorno

$$\mathbf{U}(0, y, z, t) = \mathbf{U}_i(y, z, t)$$

$$\mathbf{U}(L, y, z, t) = \mathbf{U}_d(y, z, t)$$

$$\mathbf{U}(x, H, z, t) = \mathbf{U}_t(x, z, t)$$

$$\mathbf{U}(x, 0, z, t) = \mathbf{U}_p(x, z, t)$$

$$\mathbf{U}(x, y, 0, t) = \mathbf{U}_{fo}(y, z, t)$$

$$\mathbf{U}(x, y, F, t) = \mathbf{U}_{fr}(y, z, t)$$

Los subíndices  $i$ ,  $d$ ,  $p$ ,  $t$ ,  $fo$  y  $fr$  representan respectivamente las fronteras izquierda, derecha, superior, inferior, fondo y frente.

El método originalmente planteado por Godunov (1959) consiste básicamente en considerar un valor constante de las variables conservadas en cada celda y plantear un problema de Riemann local en cada frontera. Como los problemas de Riemann locales son lineales tienen solución exacta dada por un número de ondas igual al número de autovalores de la matriz jacobiana. Entre estas ondas el valor de las variables conservadas es constante y el autovalor correspondiente a cada onda determina su velocidad de desplazamiento.

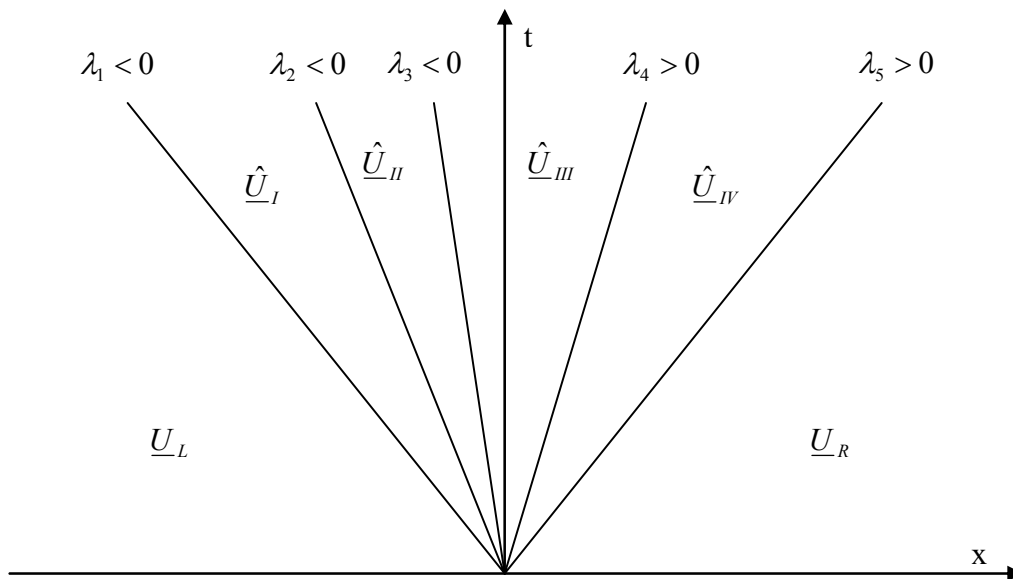


Fig. 1. Solución exacta del problema de Riemann.

En un trabajo posterior, Godunov (1976) demostró que esto mismo podía plantearse definiendo flujos a través de la frontera como se expresa en la Ec. (2). Más tarde numerosos autores han planteado diversas maneras de calcular estos flujos, siendo la más ampliamente utilizada la propuesta por Roe (1981). Dicho método con el agregado del esquema TVD antes mencionado es el que se ha empleado en este artículo.

### 3.2 Métodos de Alta Resolución. Flujos Numéricos.

Se entiende por Métodos de Alta Resolución a aquellos que tienen por lo menos una exactitud de segundo orden en soluciones suaves y, además, pueden captar discontinuidades sin oscilaciones (LeVeque, 1992 y 2005). La idea principal es intentar usar un método de orden elevado, pero modificarlo con el objeto de incrementar la disipación numérica en la vecindad de una discontinuidad, por ejemplo considerando al flujo numérico como una combinación de un flujo de orden elevado  $F^H$  y uno de bajo orden  $F^L$ .

Uno de los métodos de alta resolución más difundidos expresa el flujo numérico como:

$$\mathbf{F}^H = \mathbf{F}^L + \Phi(\mathbf{F}^H - \mathbf{F}^L)$$

donde  $\Phi$  es la función limitadora, la cual tiene como objeto cambiar suavemente el esquema entre una exactitud alta y baja. En regiones del espacio donde la solución es suave la función limitadora debe ser unitaria para que el esquema logre allí una buena aproximación. En regiones donde hay gradientes pronunciados la función limitadora debe tomar valores cercanos a cero para evitar oscilaciones numéricas que no representan la realidad física. En base a experiencias previas en simulaciones 1D y 2D (Elaskar et al., 2001 y Maglione et al., 2006) los autores han escogido la función limitadora minmod.

Con la finalidad de captar correctamente las ondas de expansión, Yee (1989) en su esquema introduce una función que cambia el valor absoluto del valor propio por una variación parabólica

$$\sigma(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } |x| \geq \varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon}(x^2 + \varepsilon^2) & \text{si } |x| \leq \varepsilon \end{cases}$$

El flujo numérico propuesto por Roe (1981) con las modificaciones introducidas por Harten y Yee (1985) finalmente adopta la forma siguiente:

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2},j,k}^n = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{F}_{i+1} + \mathbf{F}_i - \sum_{p=1}^m \hat{\mathbf{K}}_{i+\frac{1}{2}}^p \Phi_{i+\frac{1}{2}}^p \right]_{j,k}^n \quad (3)$$

donde:

$$\Phi_{i+\frac{1}{2}}^p = (g_{i+1}^p + g_i^p) - \sigma(\lambda_{i+\frac{1}{2}}^p + \gamma_{i+\frac{1}{2}}^p) \alpha_{i+\frac{1}{2}}^p$$

es la función limitadora “minmod”, con:

$$\gamma_{i+\frac{1}{2}}^p = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^p} (g_{i+1}^p - g_i^p) & \text{si } \alpha_{i+\frac{1}{2}}^p \neq 0 \\ 0 & \text{si } \alpha_{i+\frac{1}{2}}^p = 0 \end{cases}$$

$$g_i^p = S \cdot \max \left\{ 0; \min \left[ \frac{1}{2} \sigma_{i+\frac{1}{2}}^p |\alpha_{i+\frac{1}{2}}^p|; \frac{S}{2} \sigma_{i-\frac{1}{2}}^p \alpha_{i-\frac{1}{2}}^p \right] \right\}$$

$$S = \text{sgn}(\lambda_{i+\frac{1}{2}}^p)$$

El flujo numérico dado por la Ec. (3) es el que se utilizará para obtener la evolución temporal de las variables conservadas a través de la Ec. (2).

#### 4 RESULTADOS

Los resultados se obtuvieron mediante un código numérico diseñado en lenguaje FORTRAN. El alto costo computacional que debió pagarse por la inclusión de la tercera dimensión obligó a realizar una drástica reducción de la densidad del mallado. Se utilizó en una primera instancia un mallado de 200 celdas en dirección longitudinal y 70 celdas en las otras dos direcciones. Los resultados así obtenidos se compararon con resultados en 2D obtenidos con un mallado de 1000x350 que habían sido ya validados, observándose una similitud casi total (Maglione, 2004). En una segunda etapa y notándose que la diferencia en las densidades de los mallados producía algunas pequeñas diferencias en los resultados, se realizaron ensayos en 3D con cuatro mallas diferentes, con el objetivo de comprender mejor

las diferencias producidas por esta causa.

Cabe destacar en este punto, que para el cálculo se utilizó una computadora personal con procesador AMD Athlon 64 X2 Dual Core 3800+ de 2,1GHz con 1Gb de memoria RAM. Cada corrida del programa tomó poco más de un día, y un pequeño aumento (del orden del 10%) del número de celdas en cada dimensión llevaba a que cada paso temporal (de los 1500 implementados) demandara más de una hora. Más aún, si el número de celdas por dimensión era aumentado en un 20% se superaba la capacidad del compilador, apareciendo un mensaje de error.

En el problema de Riemann magnetogasdinámico se consideraron los siguientes datos iniciales a cada lado de la membrana, expresados en sus variables primitivas o físicas:

$$W = \begin{bmatrix} \rho \\ u_x \\ u_y \\ u_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \\ p \end{bmatrix}; W_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,75 \\ 1 \\ 0,5 \\ 1 \end{bmatrix}; W_d = \begin{bmatrix} 0,125 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,75 \\ -1 \\ -0,5 \\ 0,1 \end{bmatrix}$$

A partir de estos datos se obtienen los resultados que a continuación se describen. Pueden observarse en las Figuras 2 a 6 como varían, a lo largo del eje longitudinal del tubo de choque magnetogasdinámico, los valores las variables 3D comparadas con sus correspondientes 2D para  $t = 0.2s$ . En la Figura 2 se presenta la densidad, en la Figura 3 la presión, en la Figura 4 las velocidades y en la Figura 6 los campos magnéticos.

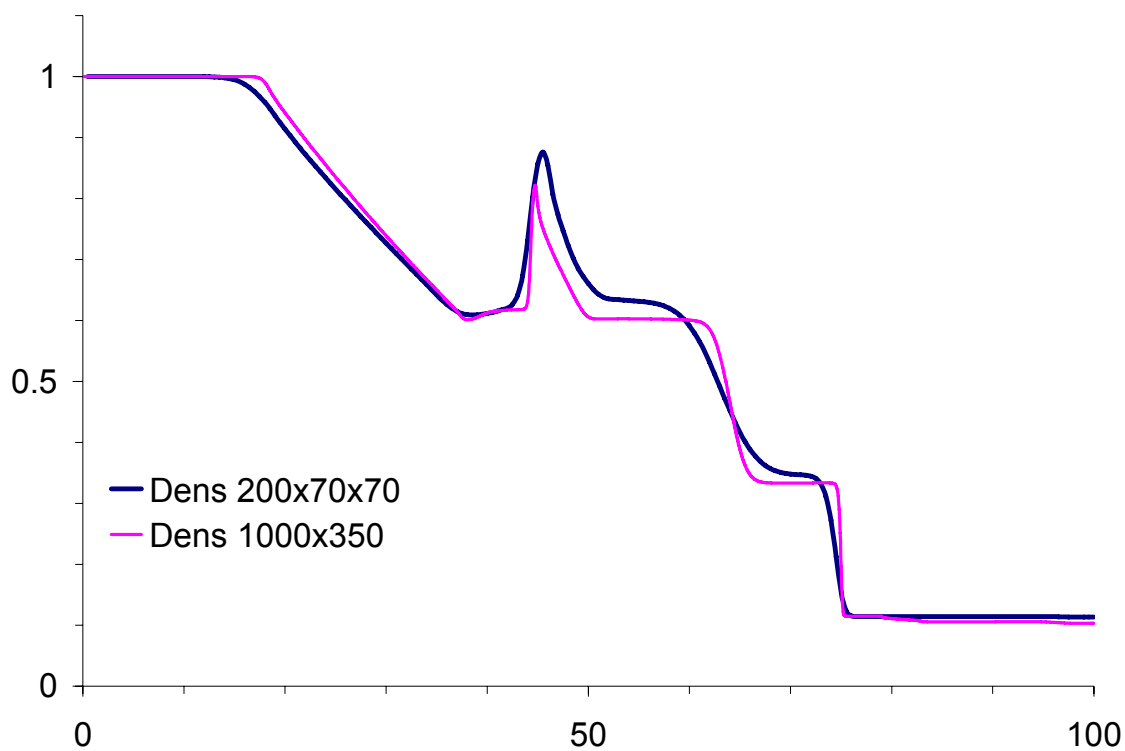


Fig. 2. Densidad 2D y 3D para  $t = 0,2s$ .

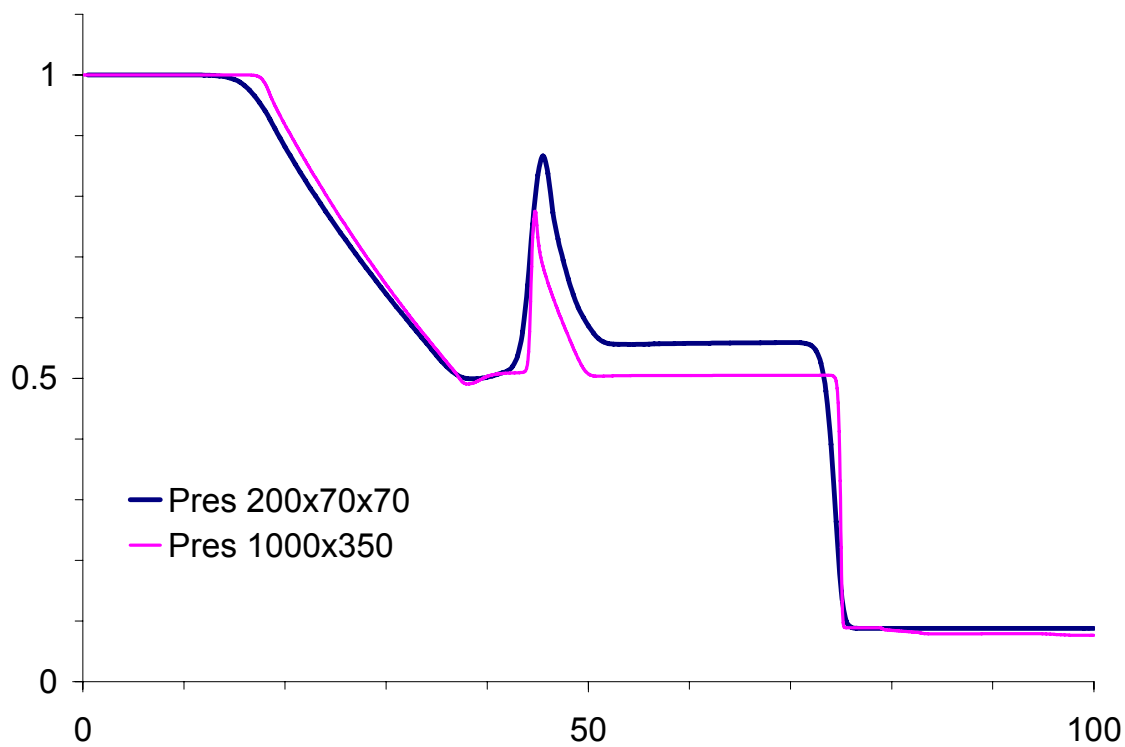


Fig. 3. Presión 2D y 3D para  $t = 0,2s$ .



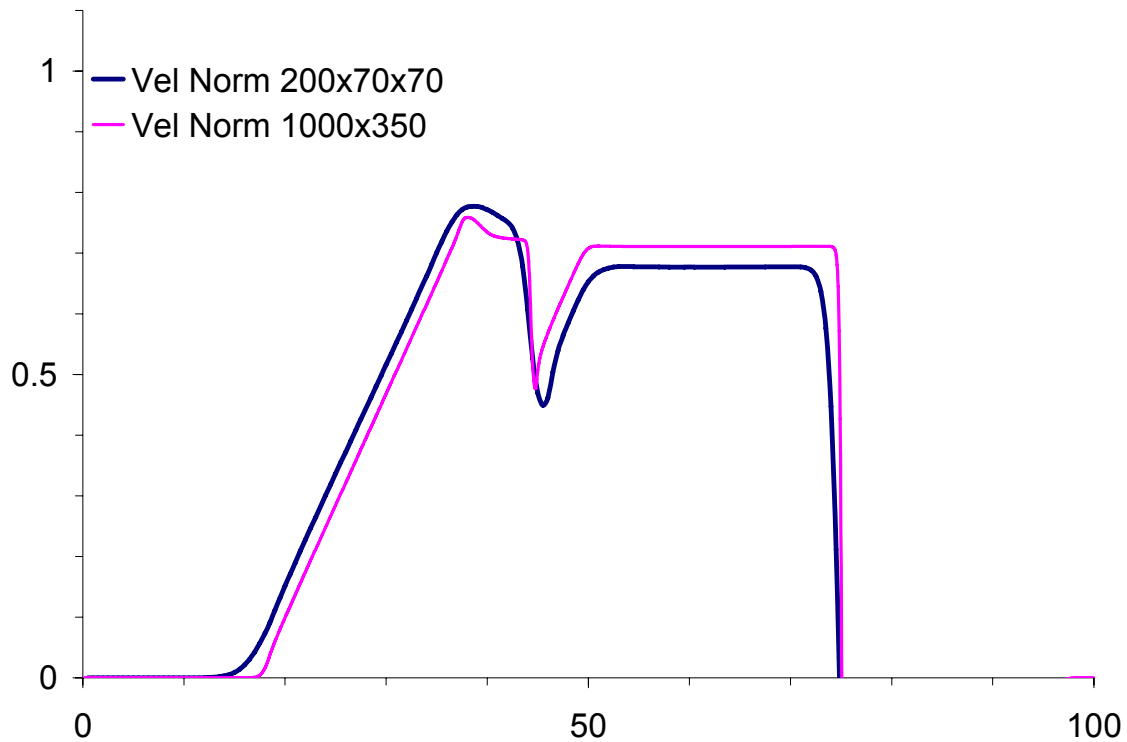


Fig. 4. Velocidad Normal 2D y 3D para  $t = 0,2s$ .

Podemos observar en la Figura 2 la presencia de cinco ondas en el campo de densidades. Comenzando de izquierda a derecha vemos una onda de expansión que viaja hacia la izquierda, una onda compuesta, una discontinuidad de contacto, una onda de choque y una onda de expansión que viaja hacia la derecha. Se destaca que en el problema de Riemann para las ecuaciones de la MGDI tres ondas se acoplan reduciendo su número de 8 a 5 ondas (Udrea, 1999).

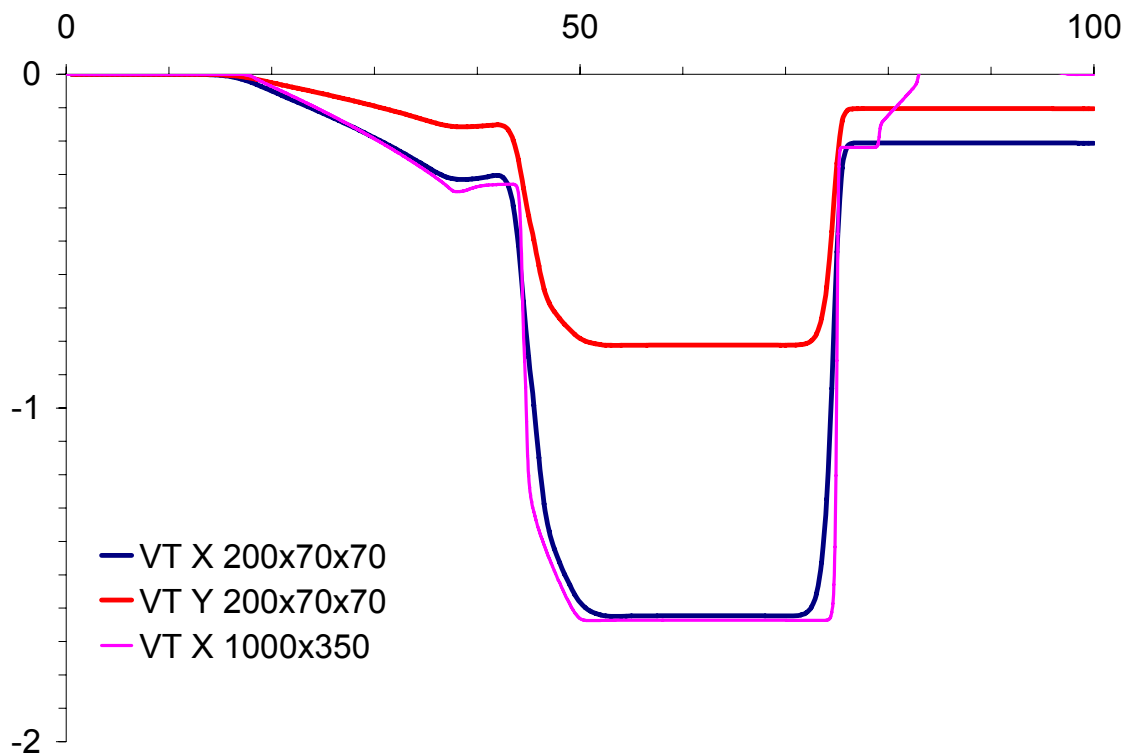
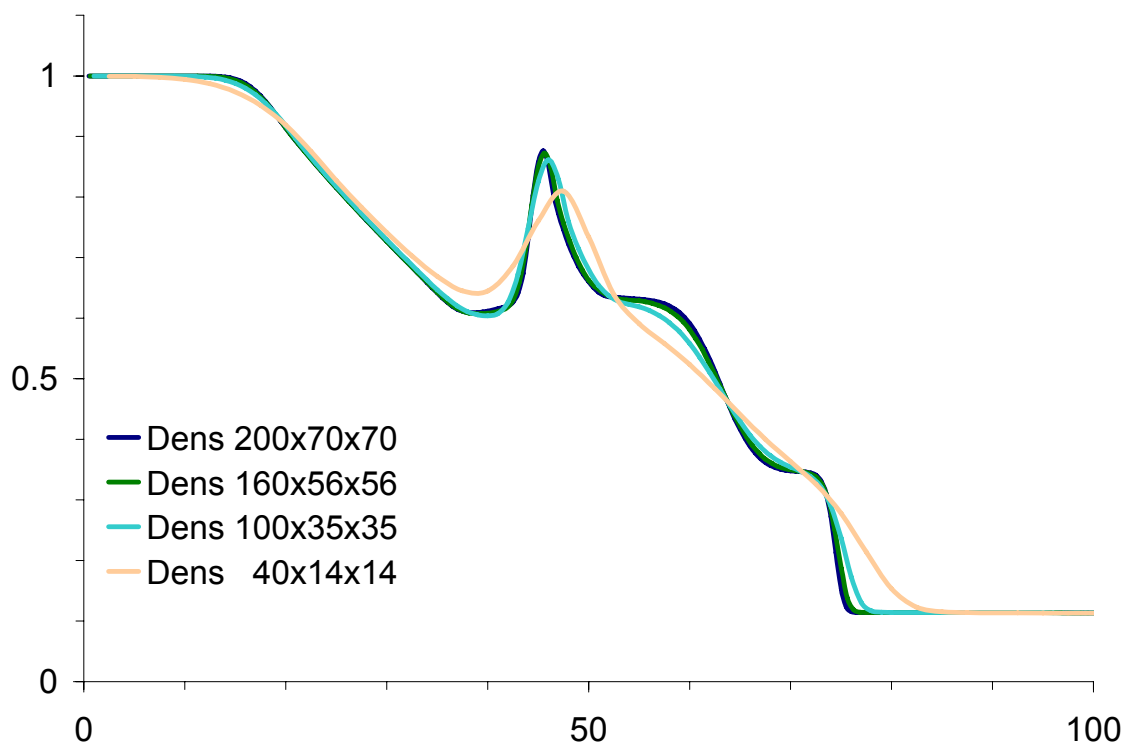
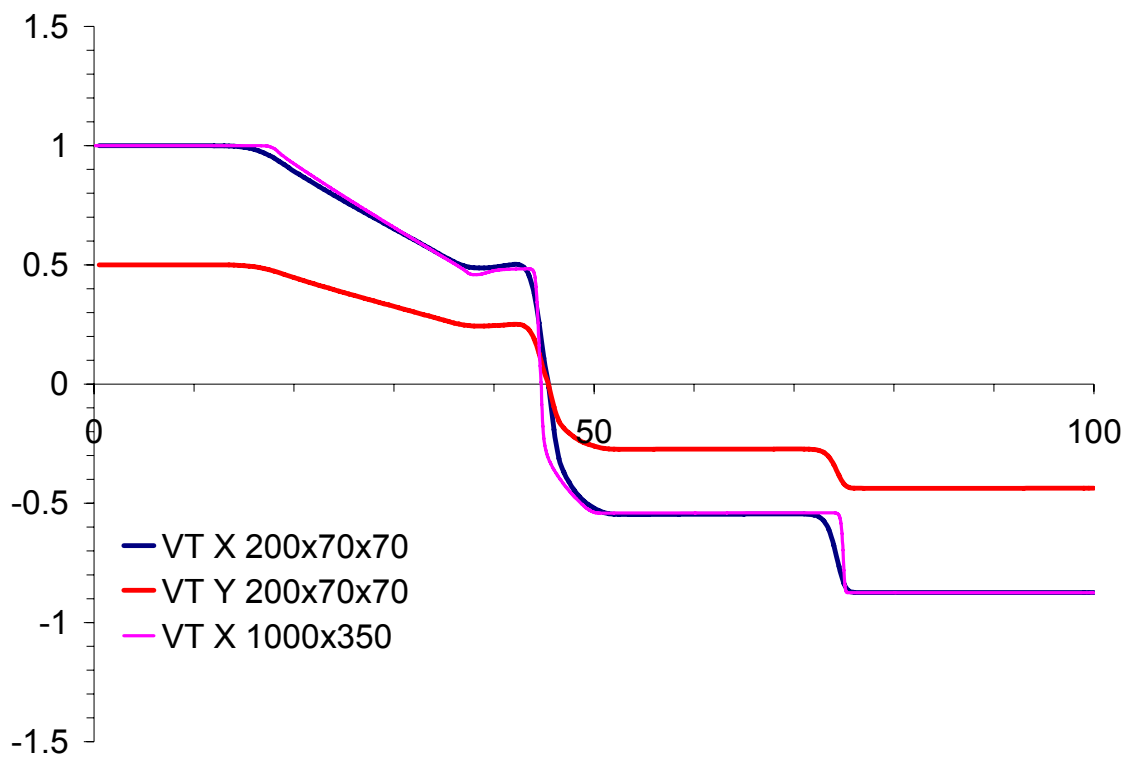


Fig. 5. Velocidades Tangenciales 2D y 3D para  $t = 0,2s$ .

En las Figuras 7 a 9 se observan algunas variables 3D calculadas con mallas de distintas densidades. Se han implementado las siguientes mallas: 200x70x70, 160x56x56, 100x35x35 y 40x14x14. En ellas se observa que las diferencias inducidas por las distintas densidades de mallado coinciden con aquellas observadas entre los valores 2D y 3D en las Figuras 2 a 6.

De las Figuras 7, 8 y 9 puede observarse que las dos mallas más densas (200x70x70 y 160x56x56) captan en forma similar los resultados y la malla menos densa (40x14x14) es la que introduce un error notablemente mayor que las otras tres mallas en la resolución del problema de Riemann en estudio.



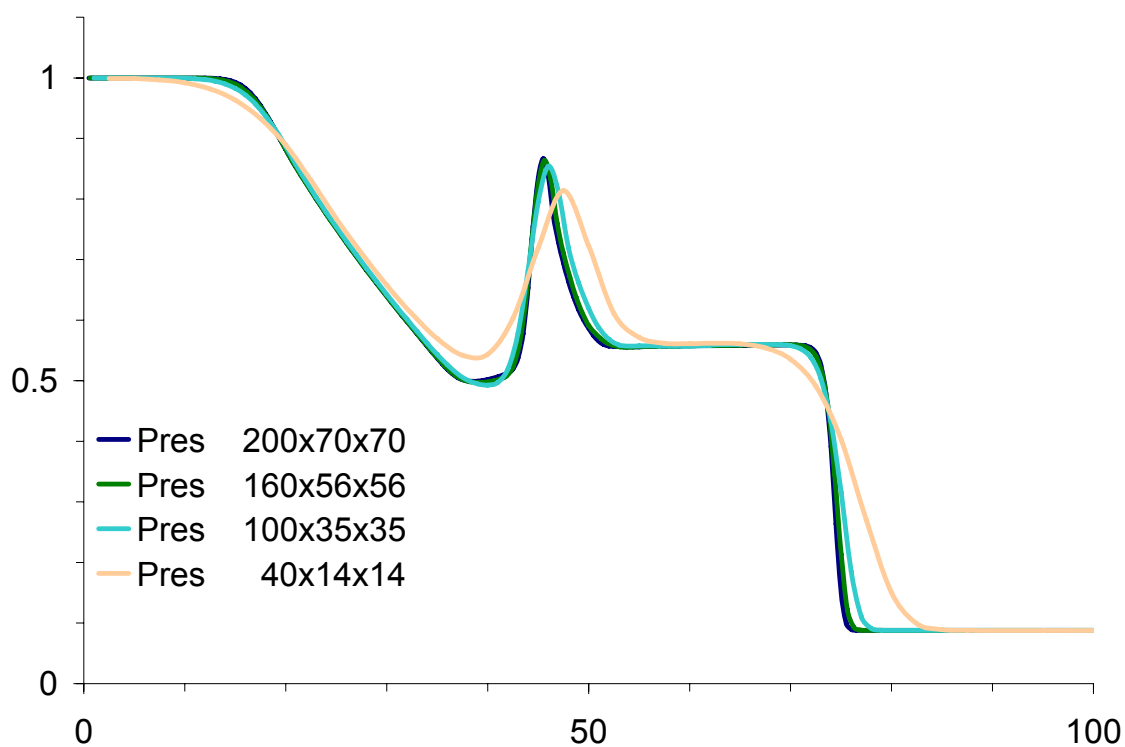


Fig. 8.- Comparación de mallas. Presión para  $t = 0,2s$

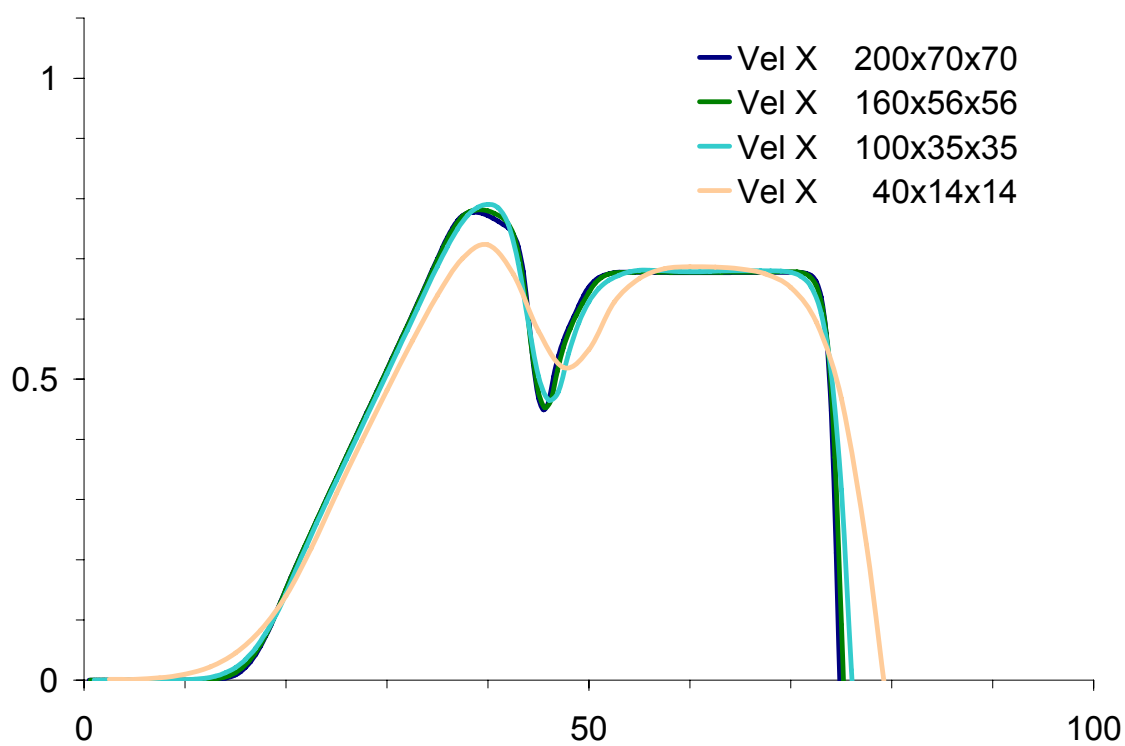


Fig. 9. Comparación de mallas. Velocidad longitudinal para  $t = 0,2s$

## CONCLUSIONES

Se han presentado en este trabajo los resultados numéricos obtenidos con un código desarrollado con la finalidad de modelar el flujo magnetogasdínámico tridimensional de un gas conductor ideal, basado en un solver de Roe modificado por Harten e Yee, con una técnica de aproximación TVD.

Los resultados obtenidos en el tubo de choque magnetogasdínámico han sido satisfactorios y concordantes con los alcanzados por miembros de la comunidad científica tanto para flujos unidimensionales (Brio y Wu, 1988) y para flujos bidimensionales (Maglione, 2003 y 2006; Elaskar 2006). La técnica numérica permitió capturar ondas de choque sin oscilaciones y buenos niveles de aproximación en regiones de flujo sin discontinuidades.

Cabe destacar que los resultados obtenidos presentan un aspecto un tanto diferente de aquellos observados en trabajos en 1D y 2D. Se destacan la existencia de características menos definidas y curvas más redondeadas generadas por causa de la muy inferior resolución de la malla utilizada en las simulaciones 3D. Este análisis es apoyado por lo observado en las Figuras 7 a 9, correspondientes a un mismo caso con mallados diferentes, mientras más densa es la malla mejor son los resultados alcanzados.

El nuevo código 3D desarrollado ha sido validado, demostrando ser robusto y preciso, con un “benchmark” exigente desarrollado por Brio y Wu (1988) con la finalidad de evaluar el comportamiento de códigos numéricos que busquen soluciones de las ecuaciones de la magnetohidrodinámica.

Se espera en un futuro no lejano incluir en el modelo los efectos disipativos presentes en gases reales y probar la respuesta del modelo en geometrías de mayor complejidad.

Con la finalidad de solucionar el inconveniente del elevado tiempo de procesamiento se intentará paralelizar el código.

## Agradecimientos

Esta investigación ha recibido apoyo del CONICET mediante el proyecto PIP No 5692; de FONCYT con el Proyecto PICTO-UNRC-2005 N° 30339, y de las Universidad Nacional de la Plata y Córdoba.

## REFERENCIAS

- Borgazzi, A. y Costa, A., Determination of intensity variations along coronal loops. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, 67 (17): 1714-2005, 2005.
- Costa, A., Topics on coronal seismology. *Aceptado para publicación en Physica Scripta*, 2008.
- Brio, M. y Wu C. C.: An upwind differencing scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics, *Journal of Computational Physics* 75: 400-422, 1988.
- D'Ambrosio D. y Giordano, D., Electromagnetic Fluid Dynamics for Aerospace Applications. Part I: Classification and critical Review of Physical Models. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Paper 2004-2165*, 2004.
- D'Ambrosio D.; Pandolfi, M. and Giordano, D. Electromagnetic Fluid Dynamics for Aerospace Applications. Part II: Numerical Simulation Using Different Physical Models. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Paper 2004-2362*. 2004.

- Dendy, R., *Plasma Physics. An Introductory Course*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- Elaskar S., Sanchez C. y Brito H., Numerical Tools for the Simulation of the APPT behaviour: Arc Generation and Plasma Flow, *Third International Conference on Spacecraft Propulsion*, organized by ESA y CNES en Cannes, Francia, Octubre 2000.
- Elaskar y H. Brito, Solution of the magnetogasdynamics equations using a TVD scheme as a tool for electric propulsion, *IEPC paper: IEPC-01-141*, 2001.
- Elaskar, S.; Maglione, L.; Falcinelli, O.; Brito, H. y Tamagno, J., Numerical simulation of MGD flows for plasma propulsion, *Paper IAC-06-C4.P.4.10*, 2006.
- Fernández, C; Elaskar, S.; Costa, A. y Schulz, W., Simulación de la propagación de ondas en arcos magnéticos, *aceptado para ser publicado en Mecánica Computacional*, 2008.
- Godunov, S. A Finite Difference Method for the Computation of Discontinuous Solutions of the Equations of Fluid Dynamics. *Mat. Sb.*, 47:357-393, 1959
- Godunov, S. *Numerical Solution of Multi-Dimensional Problems in Gas Dynamics* Nauka Press, Moscow, 1976
- Keppens, R., Dynamics controlled by magnetic fields: parallel astrophysical computations', in *Parallel Computational Fluid Dynamics – Trends and Applications*, eds. C. B. Janssen et al., Amsterdam, Elsevier Science B.V., 31–42, 2001.
- Le Veque R. *Numerical Methods for Conservation Laws*, Birkhäuser, Germany, 1992.
- LeVeque R., (2005) *Numerical Methods for Hyperbolic Systems*, Cambridge Text in Applied Mathematics, Cambridge, 2005.
- Lorevich, J., A finite volume algorithm for the two fluid plasma system in one dimension, *Master, University of Washington*, 2004.
- Maglione, L. Simulación numérica del flujo magnetogasdinámico inestacionario en dos dimensiones, *Tesis de Maestría, U.N. de Río Cuarto*, 2004.
- Maglione, L., Elaskar, S. y Brito H., Numerical simulation of two-dimensional, non-steady, ideal magnetogasdynamic equations. 28th International Electric Propulsion Conference. *IEPC. Paper N° 70*, 2003.
- Maglione L., Elaskar S., Brito H. Y Dean R, Simulación numérica de flujos magnetogasdinámicos reales en dos dimensiones. *Mecánica Computacional Vol XXV*, pp. 2475-2484 A. Cardona, N. Nigro, V. Sonzogni, M. Storti. (Eds.) Santa Fe, Argentina, Noviembre 2006.
- Powell K., An approximate Riemann solver for magnetohydrodynamics (that works in more than one dimension). *NASA Contract No NAS1-19489*, ICASE, NASA Langley Research Laboratory, Hampton, 1995.
- Roe, P. L., "Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference scheme", *Journal of Computational Physics*, 43: 357–372, 1981.
- Sankaran, K., Simulation of MPD Flows Using a Flux-Limited Numerical Method for the MHD Equations, *Master Thesis, Princeton University*, 2003.
- Udrea, B., (1999), An advanced implicit solver for MHD, *PhD Thesis, University of Washington*, 1999.
- Yee H., Warming R. y Harten A., Implicit Total Variation Diminishing (TVD) Schemes for

steady-state Calculations, *Journal of Computational Physics* 57: 327-360, 1985.

Yee H., A class of high resolution explicit and implicit shock-capturing methods. *NASA Report N89-25652*, 1989.